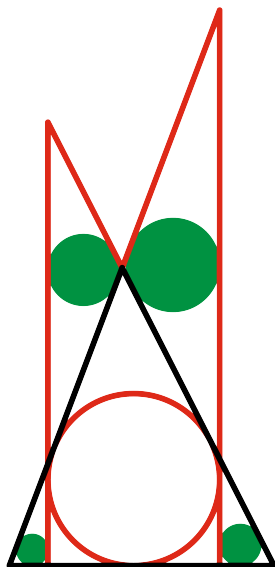


DAS LOGO DER LANDESRUNDE DER MATHEMATIK-OLYMPIADE 2013 IN KÖLN

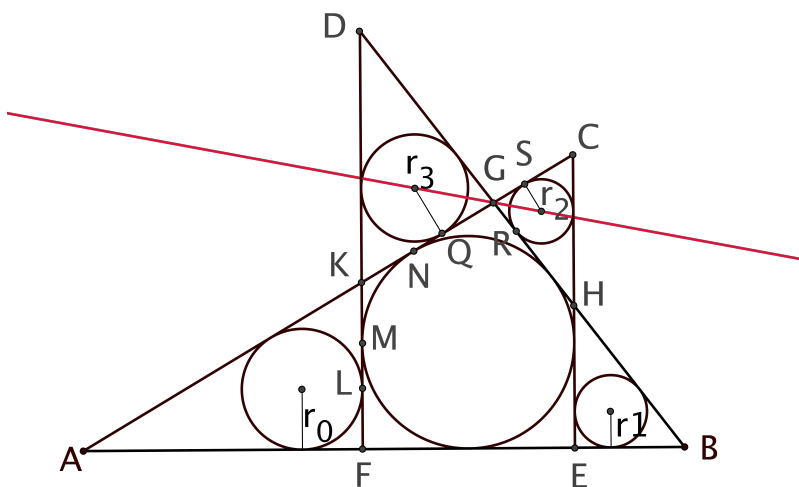
PHILIPP LAMPE

Unten sehen Sie das Logo der Landesrunde der Mathematik-Olympiade 2013 von Nordrhein-Westfalen in Köln. Dieser Text möchte die Wahl des Logos erläutern. Das Logo illustriert die folgende Geometrieaufgabe, die wir aus dem schönen Buch [1] über japanische Tempelgeometrie kennen.



Aufgabe. Es sei Γ ein Kreis, der eine Gerade g berührt. Das Dreieck $\triangle AEC$ sei so gewählt, dass es bei E rechtwinklig ist, den Inkreis Γ hat und seine Seite $\overline{AE}$ auf g liegt. Das Dreieck $\triangle BDF$ sei so gewählt, dass es bei F rechtwinklig ist, den Inkreis Γ hat und seine Seite $\overline{FB}$ ebenfalls auf g liegt. Sei G der Schnittpunkt der Geraden AC und BD , sei H der Schnittpunkt der Geraden CE und BD und sei K der Schnittpunkt der Geraden AC und DF . Dann genügen die Inkreisradien r_0, r_1, r_2 und r_3 der Dreiecke $\triangle AFK$, $\triangle EBH$, $\triangle CHG$ und $\triangle KGD$ der Gleichung

$$r_2 r_0 = r_1 r_3.$$



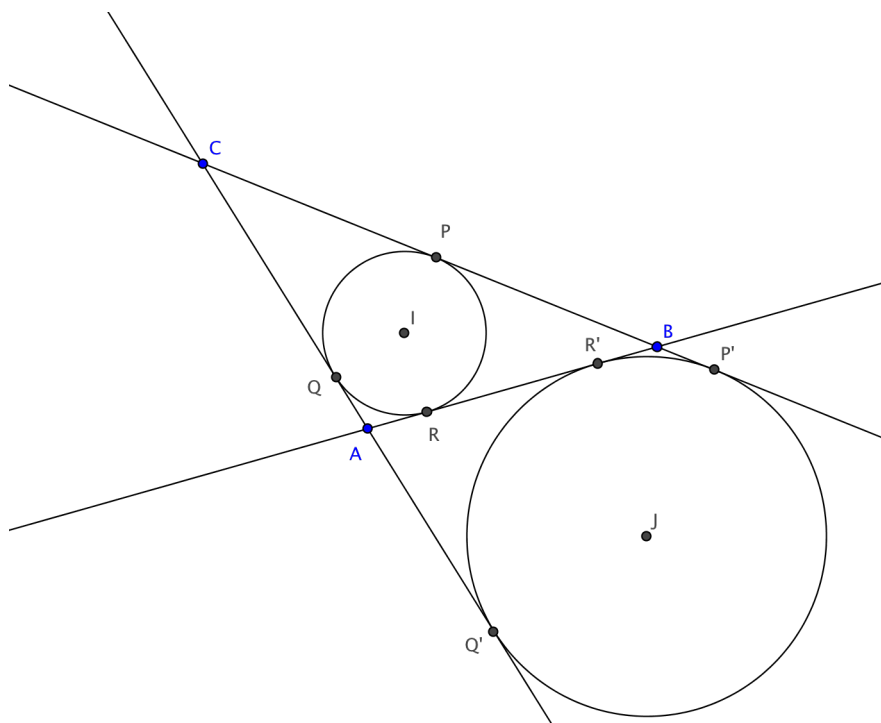
Das Logo haben wir aus folgenden Gründen ausgesucht:

- Der rote Streckenzug bildet die Buchstaben **MO** für Mathematik-Olympiade.
- Die beiden Spitzen sollen den **Kölner Dom** repräsentieren.
- Die Indizes bilden die Jahreszahl **2013**.

Die geneigte Leserin/ der geneigte Leser möge einmal versuchen, die Aufgabe zu lösen. Wenn Sie nicht weiterkommen und eine Hilfestellung brauchen, betrachten Sie das folgende berühmte Lemma über In- und Ankreise. Das Lemma ist sehr bekannt und findet in zahlreichen Wettbewerbsaufgaben Anwendung. In dem Lemma betrachten wir ein Dreieck $\triangle ABC$ mit üblichen Seitenbezeichnungen a, b, c . Wir definieren $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ als den halben Umfang des Dreiecks.

Lemma (Tangentenabschnitte). Der Inkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ berühre wie abgebildet die Dreiecksseiten in P, Q und R ; der Ankreis des Dreiecks $\triangle ABC$ zu c berühre die Geraden CA und CB in Q' bzw. P' sowie AB in R' . Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= \overline{AR} = s - a, & \overline{AQ'} &= \overline{AR'} = s - b, \\ \overline{BR} &= \overline{BP} = s - b, & \overline{BR'} &= \overline{BP'} = s - a, \\ \overline{CP} &= \overline{CQ} = s - c, & \overline{CP'} &= \overline{CQ'} = s.\end{aligned}$$



Beweis (des Lemmas). Nennen wir $x = \overline{AQ}$, $y = \overline{BR}$ und $z = \overline{CP}$. Aufgrund der Gleichheit der beiden Tangentenabschnitte von A an den Inkreis des Dreiecks folgt $x = \overline{AR}$. Gleichermäßen sind $y = \overline{BR} = \overline{BP}$ und $z = \overline{CP} = \overline{CQ}$. Daher ist

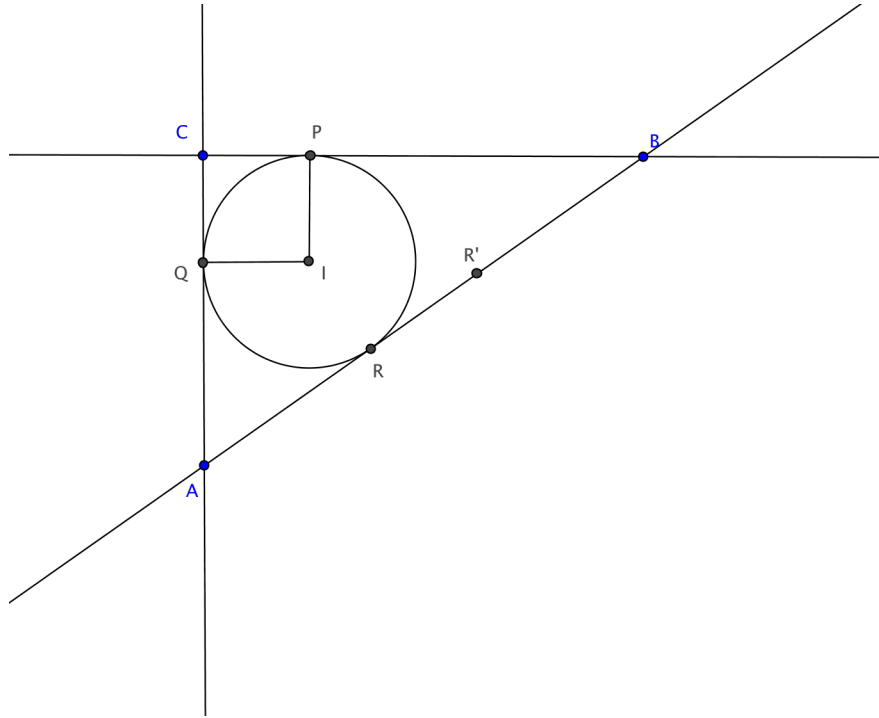
$$\begin{aligned}2x + 2y + 2z &= (x + y) + (y + z) + (z + x) \\ &= (\overline{AR} + \overline{BR}) + (\overline{BP} + \overline{CP}) + (\overline{CQ} + \overline{AQ}) \\ &= c + a + b = 2s\end{aligned}$$

Durch Kürzen erhalten wir $x + y + z = s$. Es folgt $x = s - (y + z) = s - a$ und analog $y = s - b$ und $z = s - c$.

Wenden wir uns den weiteren drei Aussagen zu. Aufgrund der Gleichheit der beiden Tangentenabschnitte von C an den Ankreis des Dreiecks gilt $\overline{CP'} = \overline{CQ'}$. Setzen wir $u = \overline{AQ'}$ und $v = \overline{BP'}$.

Es gilt, abermals aufgrund gleich langer Tangentenabschnitte, $u = \overline{AR'}$ und $v = \overline{BR'}$. Nun folgt mit $2\overline{CP'} = \overline{CP'} + \overline{CQ'} = (a+v) + (b+u) = a+b+(u+v) = a+b+c = s$ die vierte zu zeigende Gleichung. Die beiden letzten Behauptungen folgen unmittelbar aus dem bisher Gezeigten. $\square$

Als Korollar erhalten wir die bemerkenswerte Aussage $\overline{AR} = \overline{BR}$. Als ein zweites Korollar erhalten wir für den Fall eines (bei C) rechtwinkligen Dreiecks eine Formel für den Inkreisradius r von $\triangle ABC$. Wir bemerken, dass das Viereck $IQCP$ ein Quadrat ist. Also gilt $r = \overline{CQ} = s - c$.



Nun sind wir bereit, die eigentliche Aufgabe zu lösen. Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie in der obigen Skizze.

Lösung (der Aufgabe). Es gilt $r_0 = \overline{LF} = \overline{KM} = \overline{KN} = \overline{GQ}$. Analog ist $r_1 = \overline{GR} = \overline{GS}$. Dann bemerken wir, dass die beiden Inkreismittelpunkte auf der gleichen (rot eingezeichneten) Winkelhalbierenden liegen. Nach dem 2. Strahlensatz ist $r_3/\overline{GQ} = r_2/\overline{GS}$. Es ergibt sich die Behauptung $r_2 r_0 = r_1 r_3$. $\square$

LITERATUR

[1] F. Hidetoshi, T. Rothmann. *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 2008.